PART3 確率変数の標準化

要点 ① 確率変数の標準化

確率変数 X が正規分布 $N(m,\ \sigma^2)$ に従うとき

$$Z=\frac{X\qquad}{\qquad}$$

とおくと，Z は標準正規分布 $N(\ \ ,\ \ )$ に従うことが知られている。このように，確率変数 X を，標準正規分布に従う確率変数 Z に直すことを「　　　　」といい，この Z を，X を標準化した確率変数という。

例　確率変数 X が正規分布 $N(1,\ 2^2)$ に従うとき，確率 $P(-2 \leqq X \leqq 2)$ を求める。

$Z=\frac{X\qquad}{\qquad}$ とおくと，Z は標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う。

$X=-2$ のとき　$Z=\frac{-2-1}{2}=-\frac{3}{2}=-1.5$

$X=2$ のとき　$Z=\frac{2-1}{2}=\frac{1}{2}=0.5$

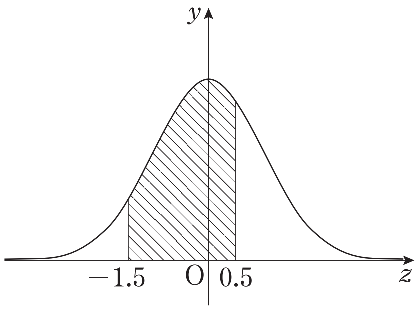
よって　$P(-2 \leqq X \leqq 2)$

$=P(-1.5 \leqq Z \leqq 0.5)$

$=P(-1.5 \leqq Z \leqq 0)+P(0 \leqq Z \leqq 0.5)$

$=P(0 \leqq Z \leqq 1.5)+P(0 \leqq Z \leqq 0.5)$

$=0.4332+0.1915=0.6247$



要点 ② 正規分布の利用

日常の身近な問題を，正規分布を利用して考える。

例 ある高校の 2 年生男子の身長が，平均 170 cm，標準偏差 6 cm の正規分布に従うものとする。この 2 年生男子の中で，身長 167 cm 以上 173 cm 以下の生徒は約何 % いるかを求める。

身長を X cm とすると，X は正規分布 $N(\quad,\quad)$ に従う。

$Z=\dfrac{X-\quad}{\quad}$ とおくと，Z は標準正規分布 $N(\ ,\ )$ に従う。

$X=167$ のとき　$Z=-0.5$　　　　$X=173$ のとき　$Z=0.5$

よって　$P(167\leqq X\leqq 173)$

$=P(-0.5\leqq Z\leqq 0.5)$

$=P(-0.5\leqq Z\leqq 0)+P(0\leqq Z\leqq 0.5)$

$=\quad P(0\leqq Z\leqq 0.5)=2\cdot 0.1915=0.383$

したがって，約　　% いる。

＜正規分布表＞

u	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

3 ある高校の 2 年生女子の身長が，平均 157.9 cm，標準偏差 5 cm の正規分布に従うものとする。以下の＜正規分布表＞を用いて，次の問いに答えよ。

(1) この 2 年生女子の中で，身長 155 cm 以上 163 cm 以下の生徒は約何 % いるか。

(2) この 2 年生女子の中で，身長が平均を 10 cm 以上上回る生徒は約何 % いるか。

< 正規分布表 >

u	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Point Pickup

確率変数の標準化

確率変数 X が正規分布 $N(m,\ \sigma^2)$ に従うとき，$Z=\dfrac{X-m}{\sigma}$ とおくと，確率変数 Z は標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う。このことを利用して，確率変数 X に関する確率を，確率変数 Z に関する確率として求めることができる。

第 9 講　PART3 確認問題

1　ある高校の生徒の通学時間が，平均 26 分，標準偏差 4 分の正規分布に従うものとする。以下の＜正規分布表＞を用いて，次の問いに答えよ。

＜正規分布表＞

u	.00	.01	.02	.03	.04	.05
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

(1)　通学時間が 24 分以上 30 分以下の生徒は約 [アイ] %いる。

(2)　通学時間が 20 分以下の生徒は約 [ウ] %いる。

PART3 確率変数の標準化

3 ある高校の2年生女子の身長が，平均157.9cm，標準偏差5cmの正規分布に従うものとする。以下の<正規分布表>を用いて，次の問いに答えよ。

(1) この2年生女子の中で，身長155cm以上163cm以下の生徒は約何％いるか。

(2) この2年生女子の中で，身長が平均を10cm以上上回る生徒は約何％いるか。

< 正規分布表 >

u	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

[解答]

身長をXcmとすると，Xは正規分布$N(157.9,\ 5^2)$に従う。

$Z=\dfrac{X-157.9}{5}$とおくと，Zは標準正規分布$N(0,\ 1)$に従う。

(1) $X=155$のとき　$Z=-0.58$　　　$X=163$のとき　$Z=1.02$

よって　$P(155\leqq X\leqq 163)$

$=P(-0.58\leqq Z\leqq 1.02)$

$=P(-0.58\leqq Z\leqq 0)+P(0\leqq Z\leqq 1.02)$

$=P(0\leqq Z\leqq 0.58)+P(0\leqq Z\leqq 1.02)$

$=0.2190+0.3461=0.5651$

したがって，約57％いる。

(2) $X=167.9$のとき　$Z=2$

よって　$P(X\geqq 167.9)$

$=P(Z\geqq 2)$

$$=0.5-P(0 \leqq Z \leqq 2)$$

$$=0.5-0.4772=0.0228$$

したがって，約 2% いる。

第 9 講　PART3 確認問題 解答

1

(1)　**[正解]** アイ：53

[解説]

通学時間を X 分とすると，X は正規分布 $N\left(26,\ 4^2\right)$ に従う。

$Z=\dfrac{X-26}{4}$ とおくと，Z は標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う。 [A]

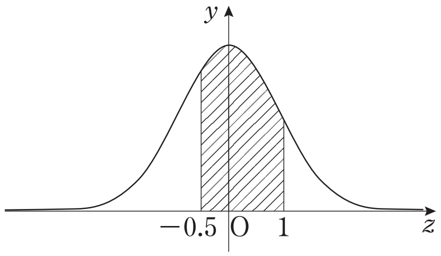
$X=24$ のとき $Z=-0.5$

$X=30$ のとき $Z=1$

よって

$$\begin{aligned}&P(24\leqq X\leqq 30)\\&=P(-0.5\leqq Z\leqq 1)\\&=P(-0.5\leqq Z\leqq 0)+P(0\leqq Z\leqq 1)\\&=P(0\leqq Z\leqq 0.5)+P(0\leqq Z\leqq 1)\\&=0.1915+0.3413=0.5328\end{aligned}$$

したがって，**約 53%** いる。



[A]　確率変数 X が正規分布 $N\left(m,\ \sigma^2\right)$ に従うとき，$Z=\dfrac{X-m}{\sigma}$ とおくと，確率変数 Z は標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う。

(2)　**[正解]** ウ：7

[解説]

通学時間を X 分とすると，X は正規分布 $N(26,\ 4^2)$ に従う。

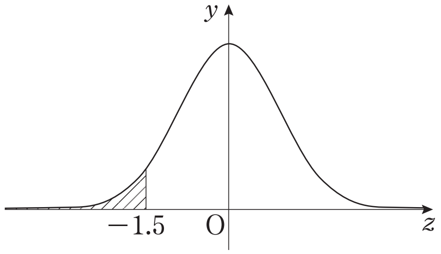
$Z=\dfrac{X-26}{4}$ とおくと，Z は標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う。[B]

$X=20$ のとき $Z=-1.5$

よって

$$\begin{aligned} P(X \leqq 20) &= P(Z \leqq -1.5) \\ &= P(Z \geqq 1.5) \\ &= 0.5-P(0 \leqq Z \leqq 1.5) \\ &= 0.5-0.4332=0.0668 \end{aligned}$$

したがって，**約 7%** いる。



[B]　確率変数 X が正規分布 $N(m,\ \sigma^2)$ に従うとき，$Z=\dfrac{X-m}{\sigma}$ とおくと，確率変数 Z は標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う。